



**HAL**  
open science

## Vers une contrainte équivalente multiphysique

Olivier Hubert, Laurent Daniel, Karine Lavernhe-Taillard

► **To cite this version:**

Olivier Hubert, Laurent Daniel, Karine Lavernhe-Taillard. Vers une contrainte équivalente multiphysique. Matériaux 2010, Oct 2010, Nantes, France. hal-01533017

**HAL Id: hal-01533017**

**<https://hal.science/hal-01533017>**

Submitted on 5 Jun 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Vers une contrainte équivalente multiphysique

Olivier HUBERT<sup>a,\*</sup>, Laurent DANIEL<sup>b</sup>, Karine LAVERNHE-TAILLARD<sup>a</sup>

<sup>a</sup> LMT-Cachan (ENS-Cachan, CNRS UMR 8535, Université Paris 6) 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan cedex - France

<sup>b</sup> LGEP (SUPELEC, CNRS UMR 8507, UPMC, Univ Paris-Sud), 11 rue Joliot-Curie, Plateau de Moulon, F-91192 Gif-sur-Yvette Cedex - France

\* contact : hubert@lmt.ens-cachan.fr

---

### RESUME:

La plupart des modèles usuels décrivant l'effet d'une contrainte mécanique sur le comportement électromagnétique (matériaux ferro / ferrimagnétiques, matériaux ferroélectriques) sont limités à des chargements uniaxiaux de traction ou de compression. Pour décrire l'effet d'une contrainte multiaxiale, une possibilité consiste à définir une contrainte uniaxiale fictive, la contrainte équivalente, modifiant le comportement électromagnétique de manière similaire à l'état multiaxial auquel elle correspond. Une nouvelle définition d'une telle contrainte équivalente est proposée dans le cadre du couplage magnéto-élastique, basée sur une équivalence en énergie de couplage. On montre comment cette formulation peut être étendue aux milieux ferroélectriques, ainsi qu'à d'autres formes de couplages basés sur un équilibre de phases (en particulier le couplage thermomécanique à la base du comportement des alliages à mémoire de forme)

**MOTS-CLES** : couplages multiphysiques, magnétoélasticité, électroélasticité, changement de phases

---

### 1. Introduction

La limitation principale de la plupart des modèles décrivant l'effet d'une contrainte mécanique sur le comportement électromagnétique (matériaux ferro / ferrimagnétiques, matériaux ferroélectriques) est qu'ils sont limités à des chargements uniaxiaux de traction ou de compression. Pour décrire l'effet d'une contrainte multiaxiale, une possibilité consiste à définir une contrainte uniaxiale fictive, la contrainte équivalente. La contrainte équivalente est communément définie comme une contrainte uniaxiale qui modifie le comportement électromagnétique de manière similaire à l'état multiaxial auquel elle correspond.

Une nouvelle définition d'une telle contrainte équivalente est proposée, basée sur une équivalence en énergie de couplage. Plusieurs formulations ont été proposées dans le passé pour le comportement magnétique. La formulation proposée, tout comme son extension aux milieux ferroélectriques, sont des concepts nouveaux. Il est par ailleurs montré que l'extension à d'autres formes de couplage est possible ; elle dépend du lien qui peut exister entre le phénomène physique et le potentiel élastique.

Une validation de la démarche est proposée pour le couplage magnétoélastique. Il s'agit de mesures magnétiques réalisées sur une éprouvette de fer-cobalt soumise à un chargement mécanique biaxial. La contrainte équivalente calculée à partir de l'équivalence en énergie de couplage montre un meilleur accord avec l'expérience que les formulations de la littérature. Deux formulations sont proposées : une formulation simplifiée de type déviatorique, une formulation généralisée mais dépendant des constantes physiques du matériau. Les limites de cette modélisation sont discutées.

### 2. Couplages magnétomécanique et électromécanique

#### 2.1 Comportement mécanique, magnétique et diélectrique

Lorsqu'on applique une contrainte sur un matériau, il se déforme. Les grandeurs utilisées pour décrire l'état mécanique sont le tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}$  et le tenseur des déformations  $\bar{\epsilon}$ . Dans le cadre de l'élasticité linéaire, La loi de comportement qui relie ces deux variables d'état peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{\sigma} = \underline{C} \bar{\epsilon} \quad (1)$$

où  $\underline{C}$  désigne le tenseur d'élasticité et  $\bar{\epsilon}$  le tenseur des déformations élastiques. Il s'agit de la loi de Hooke, qui constitue un modèle de comportement.

Quand on soumet un matériau ferro ou ferrimagnétique à un champ magnétique, il s'aimante. Les grandeurs utilisées pour décrire l'état magnétique sont les vecteurs aimantation  $\bar{M}$  et champ  $\bar{H}$ . La relation qui les lie est fortement non linéaire (saturation de l'aimantation à champ élevé). Pour un milieu isotrope, Elle se met sous la forme :

$$\bar{M} = \chi(H) \bar{H} \quad (2)$$

où  $\chi(H)$  désigne la susceptibilité magnétique.

Le champ magnétique n'étant pas nul dans l'air, les équations d'équilibre (Maxwell) utilisent l'induction magnétique  $\bar{B}$  qui est en relation directe avec  $\bar{M}$  et  $\bar{H}$  selon :

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) = \mu_0 (1 + \chi(H)) \bar{H} = \mu_0 \mu_r(H) \bar{H} = \mu(H) \bar{H} \quad (3)$$

où  $\mu(H)$ ,  $\mu_r(H)$  et  $\mu_0$  désignent respectivement la perméabilité magnétique, la perméabilité relative et la perméabilité du vide. La contribution du matériau étant complètement décrite par l'aimantation, on conservera l'écriture (2) pour l'expression du comportement.

Quand on soumet un matériau diélectrique à un champ électrique, il se polarise. Les grandeurs utilisées pour décrire l'état diélectrique sont les vecteurs polarisation  $\bar{P}$  et champ électrique  $\bar{E}$ . La relation qui les lie est fortement non linéaire (saturation de la polarisation à champ électrique infini). Pour un milieu isotrope, Elle se met sous la forme :

$$\bar{P} = \epsilon_0 \chi_d(E) \bar{E} \quad (4)$$

où  $\chi_d(E)$  désigne la susceptibilité diélectrique et  $\epsilon_0$  la permittivité du vide.

Le champ électrique n'étant pas nul dans l'air, les équations d'équilibre (Maxwell) utilisent l'induction électrique  $\bar{D}$  qui est en relation directe avec  $\bar{P}$  et  $\bar{E}$  selon :

$$\bar{D} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_d(E)) \bar{E} = \epsilon_0 \epsilon_r(E) \bar{E} = \epsilon(E) \bar{E} \quad (5)$$

où  $\epsilon(E)$  et  $\epsilon_r(E)$  désignent respectivement la permittivité et la permittivité relative. La contribution du matériau étant complètement décrite par la polarisation, on conservera l'écriture (4) pour l'expression du comportement.

On constate que les différences entre relations de comportement magnétique et diélectrique sont minimes, associée à une simple nuance dans l'écriture de la polarisation. Notons également que les grandeurs mécaniques, magnétiques et électriques sont associées à des énergies potentielles. La non-linéarité des comportements magnétique et diélectrique ainsi que leur caractère intrinsèquement dissipatif rend difficile une expression explicite de leur énergie.

On parlera ensuite de couplage magnéto-mécanique ou couplage électro-mécanique lorsque le comportement (susceptibilité magnétique ou diélectrique) est modifié par l'état mécanique. Le couplage inverse se traduit comme en thermo-mécanique par l'influence des grandeurs magnétique ou électrique sur l'état mécanique. Cela se traduit généralement par l'apparition d'une déformation d'origine magnétique ou électrique, déformations qui peuvent être également décrites par une loi de comportement.

Notons qu'on dissocie généralement ces déformations des déformations dues aux forces d'origine magnétique ou électrique (forces de Lorentz). Ces déformations sont le résultat d'un couplage global (ou de structure) n'impliquant que le comportement élastique du matériau. Elles ne sont ni associées au comportement magnétique, ni électrique.

## 2.2 Phénoménologie des couplages entre grandeurs électromagnétiques et mécaniques

On associe généralement aux couplages cités précédemment un certain nombre de phénomènes dont la

plupart sont exploités industriellement (les applications ne seront pas détaillées ici).

#### *Couplages magnétisme- mécanique*

La magnétostriction désigne la propriété que possèdent les matériaux ferro ou ferrimagnétiques de se déformer sous l'effet d'un champ magnétique [1]. Les matériaux ferromagnétiques exhibent aussi un effet magnétostrictif inverse, appelé effet magnétomécanique, qui se caractérise par la modification de la susceptibilité magnétique en présence de contraintes mécaniques dans le matériau. Les deux effets sont indissociables et généralement non-linéaires.

Le piézomagnétisme est la propriété que possèdent certains corps (généralement ferromagnétiques) de s'aimanter sous l'action d'une contrainte mécanique [2][3]. A l'instar de la magnétostriction ils se déforment lorsqu'on leur applique un champ magnétique. On dissocie généralement le piézomagnétisme de l'effet magnétomécanique car l'effet magnétomécanique existe pour la plupart des matériaux magnétiques, alors que le piézomagnétisme n'apparaît que quand le milieu présente une aimantation rémanente (ou polarisation magnétique). Notons que l'application d'un champ magnétique constant crée l'aimantation nécessaire à rendre piézomagnétique un matériau qui ne l'est pas initialement.

Il est également possible d'observer une influence d'un état de contrainte sur le comportement magnétostrictif. On parlera d'effet  $\Delta E$  [4].

#### *Couplages électricité-mécanique [2]*

L'électrostriction est une propriété de tout matériau non-conducteur, ou diélectrique, qui consiste en une modification de sa forme sous l'effet d'un champ électrique appliqué (déformation diélectrique). Celle-ci est généralement négligeable (et négligée) sauf dans le cas des matériaux ferroélectriques. Elle est en ce sens l'équivalent électrique de la magnétostriction. Les matériaux ferroélectriques exhibent aussi un effet électrostrictif inverse, appelé effet électromécanique, qui se caractérise par la modification de la susceptibilité diélectrique en présence de contraintes mécaniques dans le matériau. Les deux effets sont indissociables et généralement non-linéaires.

La piézoélectricité est la propriété que possèdent certains corps diélectriques (dont les ferroélectriques) de se polariser électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique et réciproquement de se déformer lorsqu'on leur applique un champ électrique (à l'instar de l'électrostriction). Le premier est généralement appelé effet piézoélectrique direct ; le second effet piézoélectrique inverse. On distingue habituellement l'électrostriction de l'effet piézoélectrique inverse. Dans un milieu électrostrictif, des champs électriques opposés créent une déformation identique. Dans un milieu piézoélectrique, des champs électriques opposés créent des déformations opposées. Notons que les relations de comportement piézoélectriques sont généralement considérées comme linéaires, ce qui simplifie considérablement leur modélisation et par voie de conséquence facilite l'utilisation de ce type de matériau.

De plus, l'effet piézoélectrique est différent de l'effet électrostrictif inverse en ce sens que dans un milieu électrostrictif, une contrainte appliquée ne crée aucune variation de polarisation électrique. Notons que l'application d'un champ électrique constant crée la polarisation nécessaire à rendre piézoélectrique un matériau qui ne l'est pas initialement.

On constate là encore de grandes similitudes entre comportements couplés magnéto-mécanique et diélectrico-mécanique. La modélisation macroscopique de tels phénomènes passe par l'utilisation de tenseurs de couplage dont l'utilisation est peu aisée quand le milieu n'est pas linéaire (on souhaite rester dans un cadre général). Une alternative est d'écrire les quantités à l'échelle où le couplage apparaît, ce qui revient à discrétiser le milieu. Ce changement d'échelle a le double avantage de rendre constant un certain nombre de quantités et d'aboutir à des formulations énergétiques relativement simples, bien adaptées à la prise en compte d'un état mécanique multiaxial. Le comportement moyen sera vu comme une « moyenne » des comportements élémentaires observés. Le prix à payer est souvent la mise en place de relations de localisation et d'homogénéisation adaptées [5][6].

### **3 Approche énergétique par changement d'échelle**

#### **3.1 Microstructures mécanique et électromagnétique**

Dans le cas des propriétés mécaniques, il est possible de définir des zones du matériau où l'hétérogénéité des propriétés mécaniques est beaucoup plus faible que pour le matériau dans son ensemble. Il s'agit par

exemple des grains dans un polycristal, ou de l'ensemble du matériau pour un monocristal. La relation de comportement entre contrainte et déformation élastique peut s'écrire de manière identique à la relation (1), où  $\underline{C}$  désigne maintenant le tenseur d'élasticité du cristal. Le nombre de constantes indépendantes dépendra des symétries du cristal [7].

L'observation microscopique d'un matériau ferro ou ferrimagnétique permet de mettre en évidence l'existence de "domaines magnétiques" [8] ou domaines de Weiss au sein desquels l'aimantation est uniforme et dirigée (en règle générale) selon un des axes de facile aimantation du cristal considéré (figure 1a). Les matériaux ferroélectriques présentent le même type de microstructure (figure 1b).

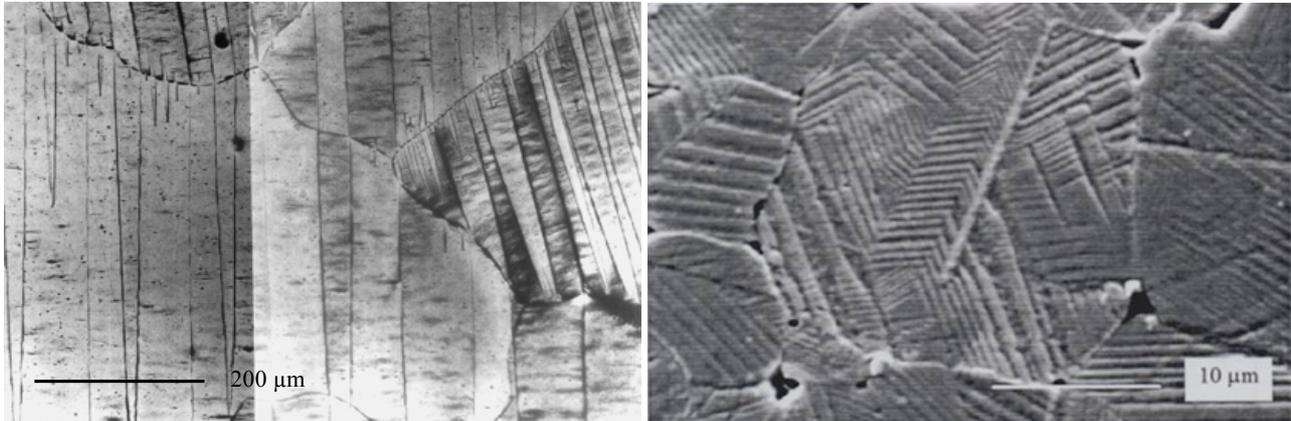


FIGURE 1 : Observation de microstructures en domaines magnétiques (Fe-3%Si) [9] et domaines ferroélectriques (TiBaO<sub>3</sub>) [10].

Chaque domaine magnétique présente une aimantation uniforme de norme  $M_s$  (aimantation à saturation), caractéristique du matériau. On parlera de polarisation à saturation  $P_s$  pour les domaines ferroélectriques. De même, chaque domaine, compte tenu de l'existence de cette aimantation ou polarisation, est le lieu d'une déformation intrinsèque qu'on appelle déformation « libre » de magnétostriction ou d'électrostriction, dont les expressions dans le repère associé au domaine (la direction 1 correspond à la direction d'aimantation ou de polarisation) sont respectivement :

$$\bar{\bar{\epsilon}}^{\mu} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} \lambda_s & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_s/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_s/2 \end{bmatrix}_{\text{domaine}} \quad (6)$$

pour le tenseur de magnétostriction, et

$$\bar{\bar{\epsilon}}^{\epsilon} = \begin{bmatrix} \delta_s'' & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_s^{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_s^{\perp} \end{bmatrix}_{\text{domaine}} \quad (7)$$

pour le tenseur d'électrostriction,

où  $\lambda_s$  et  $\delta_s''$  désignent la magnétostriction et l'électrostriction à saturation portés par les domaines magnétiques et ferroélectriques. Leur amplitude est généralement faible ( $<10^{-3}$ ), de sorte que les hypothèses habituelles de l'élasticité linéaire restent applicables.

On remarque que la déformation de magnétostriction est une déformation isochore (volume inchangé) telle que  $\text{tr}(\bar{\bar{\epsilon}}^{\mu}) = 0$ . Cette hypothèse ne se vérifie généralement pas pour la déformation d'électrostriction. On observe ainsi une électrostriction en volume  $\delta_v$  telle que  $\text{tr}(\bar{\bar{\epsilon}}^{\epsilon}) = \delta_v$ .

D'un point de vue macroscopique, l'électrostriction et la magnétostriction sont ainsi dues à la présence de ces domaines magnétiques et ferroélectriques répartis aléatoirement à l'intérieur du matériau (généralement en sous-structure de la structure cristalline).

Lorsqu'un champ électrique (ou magnétique) est appliqué, le volume des domaines « favorablement orientés » augmente en accord avec les énergies magnétostatiques et électrostatiques. Puisque chaque domaine possède sa propre aimantation ou polarisation, l'aimantation ou la polarisation du domaine dominant finit par l'emporter : ainsi apparaît une polarisation ou aimantation macroscopique dans un milieu

initialement désaimanté ou dépolarisé. Puisque chaque domaine possède sa propre déformation, la déformation du domaine dominant finit par l'emporter également. Cette déformation étant généralement différente de la somme des déformations de l'ensemble des domaines répartis aléatoirement en absence de champ, l'aimantation ou la polarisation s'accompagne d'une déformation macroscopique.

On peut interpréter de manière similaire les comportements piézoélectrique ou piézomagnétique. A noter que ceux-ci supposent l'existence d'une polarisation ou aimantation rémanente (en absence de champ). L'action du champ de contrainte consistera à modifier les fractions en domaine en relation avec les déformations libres associées ; Cette modification de fraction volumique conduit à une modification de l'aimantation ou polarisation macroscopique. L'effet « piézo » apparaît.

### 3.2 Potentiel thermodynamique d'un domaine, construction des lois de comportement

Une étape indispensable est de définir les potentiels et le comportement. L'échelle à laquelle nous nous plaçons est l'échelle des domaines. Un changement d'échelle assure ensuite une description du comportement macroscopique.

L'assemblage en domaines d'une microstructure trouve sa source dans la compétition en différents termes énergétiques. Les termes énergétiques de configuration sont l'interaction d'échange assurant un ordre local (ferromagnétique, ferrimagnétique, ferroélectrique) et l'énergie d'anisotropie cristalline souvent associée à la symétrie du cristal (anisotropies uniaxiale, cubique, etc...) [11]. Les potentiels énergétiques associés à un chargement sont l'énergie magnétostatique, l'énergie électrostatique et l'énergie élastique. Ces termes assurent l'évolution de la microstructure en domaines. Pour des raisons de simplicité et n'ayant que très peu d'information sur la topologie des domaines, on choisit de raisonner non pas par domaine mais par famille de domaine. Ainsi, une anisotropie cubique où l'axe de facile aimantation (ou polarisation) est un axe <100> produit 6 familles de domaines, 8 lorsqu'il s'agit de l'axe <111>. De même, les champs sont considérés comme homogènes (se reporter à [5] pour l'expression des champs localisés).

L'énergie magnétostatique (dite de Zeemann [12]) s'exprime à l'échelle d'une famille de domaines notée  $\alpha$  :

$$W_{\alpha}^H = -\mu_0 \bar{M}_{\alpha} \cdot \bar{H} \quad (8)$$

où  $\bar{M}_{\alpha} = M_s \bar{e}_{\alpha}$  indique le vecteur aimantation de la famille de domaines considérée.

L'énergie électrostatique a une expression similaire :

$$W_{\alpha}^E = -\bar{P}_{\alpha} \cdot \bar{E} \quad (9)$$

où  $\bar{P}_{\alpha} = P_s \bar{e}_{\alpha}$  indique le vecteur polarisation de la famille de domaines considérée.

L'énergie élastique s'exprime en fonction du tenseur des contraintes  $\bar{\sigma}_{\alpha}$  et du tenseur d'élasticité  $\underline{C}_{\alpha}$  par famille de domaine selon :

$$W_{\alpha}^{\sigma} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{\alpha} : \underline{C}_{\alpha} : \bar{\sigma}_{\alpha} \quad (10)$$

Cette expression ne fait pas apparaître explicitement le couplage puisque la contrainte par domaine est une fonction complexe de la contrainte appliquée macroscopique et des contraintes internes associées au caractère généralement incompatible des déformations libres de magnétostriction ou d'électrostriction. La formulation générale de la localisation des contraintes est dûe initialement à Hill [13] faisant suite aux travaux d'Eshelby [14]. On montre, en utilisant une hypothèse de déformation homogène que cette énergie peut se réduire à :

$$W_{\alpha}^{\sigma} = -\bar{\sigma} : \bar{\xi}_{\alpha}^{\mu} + W_0^{\sigma} \quad (11)$$

dans le cas du couplage magnéto-mécanique (on parlera d'énergie magnéto-élastique), et

$$W_{\alpha}^{\sigma} = -\bar{\sigma} : \bar{\xi}_{\alpha}^{\varepsilon} + W_0^{\sigma} \quad (12)$$

dans le cas du couplage électromécanique. On introduit ici le concept d'énergie de couplage électro-élastique.  $\bar{\xi}_{\alpha}^{\mu}$  et  $\bar{\xi}_{\alpha}^{\varepsilon}$  sont respectivement les tenseurs de déformation de magnétostriction et d'électrostriction

à l'échelle des domaines ;  $\bar{\sigma}$  est le tenseur des contraintes appliquées, supposé homogène sur le volume (on se reportera à [5] pour l'expression des contraintes localisées pour un polycristal).

Les lois de comportement sont des relations de la forme

$$\bar{M} = f(\bar{H}, \bar{\sigma}) \quad (13)$$

$$\bar{P} = g(\bar{E}, \bar{\sigma}) \quad (14)$$

pour l'aimantation et la polarisation macroscopiques,

$$\bar{\varepsilon}^\mu = f'(\bar{H}, \bar{\sigma}) \quad (15)$$

$$\bar{\varepsilon}^\varepsilon = g'(\bar{E}, \bar{\sigma}) \quad (16)$$

pour les déformations de magnétostriction et d'électrostriction macroscopiques.

Pour la construction des lois de comportement, une première méthode consiste à minimiser l'énergie libre à l'échelle du volume par rapport aux chargements en champ ou en contrainte. Cette méthode, classique en thermodynamique des milieux continus, semble peu adaptée ici compte tenu du changement d'échelle réalisé. On vérifie en effet les relations de moyenne générales<sup>1</sup>:

$$\bar{M} = \int_{\alpha} \bar{M}_{\alpha} d\alpha \quad (17)$$

$$\bar{P} = \int_{\alpha} \bar{P}_{\alpha} d\alpha \quad (18)$$

$$\bar{\varepsilon}^\mu = \int_{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha}^\mu d\alpha \quad (19)$$

$$\bar{\varepsilon}^\varepsilon = \int_{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha}^\varepsilon d\alpha \quad (20)$$

L'idée développée initialement dans [15] puis adaptée à ce type de problème dans [16] est de remplacer l'intégrale de volume par somme discrète sur un nombre fini de domaines pondéré par leur fraction volumique  $f_{\alpha}$ . Les domaines doivent être équirépartis. La première distribution admissible est une distribution cubique, où seulement 6 familles de domaines sont considérées suivant les 6 axes  $\langle 100 \rangle$  d'un cube élémentaire (figure 2).

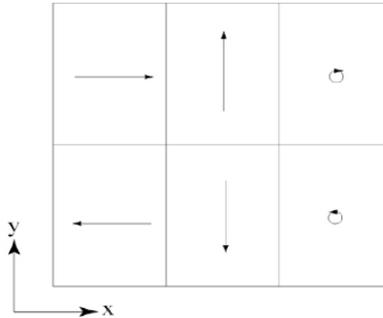


FIGURE 2 : Distribution élémentaire de domaines représentative d'un polycristal ferromagnétique, ferrimagnétique ou ferroélectrique.

L'évaluation des fractions volumiques se fait ensuite par l'intermédiaire d'une fonction de Boltzmann (21) traduisant le caractère statistique de cette distribution et fonction des énergies de chacun des domaines. Une analyse de l'état au voisinage de l'état à aimantation macroscopique nulle [5] permet d'identifier le paramètre ajustable  $A_s$  de ce modèle en fonction de la susceptibilité magnétique  $\chi_0$  ou susceptibilité diélectrique macroscopique  $\chi_0^E$  (22).

$$f_{\alpha} = \frac{\exp(-A_s \cdot W_{\alpha})}{\sum_{\alpha} \exp(-A_s \cdot W_{\alpha})} \quad (21)$$

avec :

<sup>1</sup> Les relations (19) et (20) ne sont strictement valables que lorsque le comportement élastique est homogène. On doit dans le cas contraire localiser la déformation avant d'effectuer la moyenne.

$$A_s = \frac{3\chi_0}{\mu_0 M_s^2} \quad \text{ou} \quad A_s = \frac{3\varepsilon_0 \chi_0^E}{P_s^2} \quad (22)$$

selon que le problème soit magnétique ou ferroélectrique.

La relation (21) peut être simplifiée lorsqu'on est en mesure de confondre les repères des champs, des contraintes, et de la distribution cubique, et lorsqu'on ne considère pas les rotations éventuelles de l'aimantation et de la polarisation au sein de chaque famille de domaines. Cette simplification conduit à ne considérer que les termes moteurs dans l'expression de l'énergie libre. On a :

$$W_\alpha = W_\alpha^H + W_\alpha^\sigma \quad (23)$$

pour l'énergie libre magnétomécanique, et

$$W_\alpha = W_\alpha^E + W_\alpha^\sigma \quad (24)$$

pour l'énergie libre électromécanique.

On aboutit ainsi à une forme simplifiée des lois de comportement macroscopique en réalisant une somme de chacune des grandeurs locales pondérée par la fraction volumique du domaine considéré, soit :

$$\bar{M} = \langle \bar{M}_\alpha \rangle = \sum_\alpha f_\alpha \bar{M}_\alpha \quad (25)$$

$$\bar{P} = \langle \bar{P}_\alpha \rangle = \sum_\alpha f_\alpha \bar{P}_\alpha \quad (26)$$

$$\bar{\varepsilon}^\mu = \langle \bar{\varepsilon}_\alpha^\mu \rangle = \sum_\alpha f_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha^\mu \quad (27)$$

$$\bar{\varepsilon}^\varepsilon = \langle \bar{\varepsilon}_\alpha^\varepsilon \rangle = \sum_\alpha f_\alpha \bar{\varepsilon}_\alpha^\varepsilon \quad (28)$$

#### 4 Définition de la contrainte équivalente, application au couplage magnéto-élastique

L'objet de cette communication est de pouvoir réaliser un passage entre un état multiaxial des contraintes et une contrainte uniaxiale fictive dénommée la « contrainte équivalente ». La contrainte équivalente est définie comme une contrainte uniaxiale qui modifie le comportement électromagnétique de manière similaire à l'état multiaxial auquel elle correspond. Nous nous restreignons à ce stade au couplage magnéto-mécanique pour lequel un certain nombre de développements a été publié [16][17][18]

Considérons l'assemblage de domaines magnétiques de la figure 2. Considérons d'autre part un champ  $\bar{H}$  appliqué suivant l'axe  $\bar{x}$  et deux états de contraintes, l'un multiaxial  $\bar{\sigma}$ , l'autre uniaxial  $\bar{\sigma}_u$  tel que  $\sigma_u = \bar{x} \bar{\sigma}_u \bar{x}$  soit la seule composante non nulle.

La contrainte  $\sigma_u$  produira le même effet sur le comportement magnétique à condition que la relation suivante puisse être vérifiée

$$f(\bar{H}, \bar{\sigma}) = f(\bar{H}, \sigma_u) \quad \text{et} \quad f'(\bar{H}, \bar{\sigma}) = f'(\bar{H}, \sigma_u) \quad (29)$$

ce qui se traduit en terme de relation énergétique par :

$$\sum_\alpha \left( \frac{\exp(A_s \mu_0 \bar{M}_\alpha \cdot \bar{H} + A_s \bar{\varepsilon}_\alpha^\mu : \bar{\sigma})}{\sum_\alpha \exp(A_s \mu_0 \bar{M}_\alpha \cdot \bar{H} + A_s \bar{\varepsilon}_\alpha^\mu : \bar{\sigma})} \bar{M}_\alpha \right) = \sum_\alpha \left( \frac{\exp(A_s \mu_0 \bar{M}_\alpha \cdot \bar{H} + A_s \bar{\varepsilon}_\alpha^\mu : \bar{\sigma}_u)}{\sum_\alpha \exp(A_s \mu_0 \bar{M}_\alpha \cdot \bar{H} + A_s \bar{\varepsilon}_\alpha^\mu : \bar{\sigma}_u)} \bar{M}_\alpha \right) \quad (30)$$

#### 4.1 Contrainte équivalente définie à partir d'une équivalence en énergie magnétomécanique [17]

Une simplification importante consiste à considérer le terme énergétique à l'intérieur de l'exponentielle comme suffisamment petit pour autoriser un développement limité au deuxième ordre de l'exponentielle. Ainsi, en utilisant les hypothèses suivantes:

- le produit  $A_s \bar{\varepsilon}_\alpha^\mu : \bar{\sigma} < 1$ , soit  $\bar{\varepsilon}_\alpha^\mu : \bar{\sigma} < 1/A_s$ ,
- le comportement magnétostrictif macroscopique est indépendant de la contrainte,

• le milieu est isotrope et élastiquement homogène,  
on obtient :

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{\alpha}^{\mu} : \bar{\bar{\sigma}} = \lambda_s \sigma_u \quad (31)$$

soit, après simplification :

$$\sigma_u = \sigma_{xx} - \frac{1}{2}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (32)$$

relation qu'on généralise après quelques lignes de calcul selon [17]<sup>2</sup> :

$$\sigma_u = \frac{3}{2}({}^t \bar{h} \cdot \bar{s} \cdot \bar{h}) \quad (33)$$

où  $\bar{s}$  figure le déviateur des contraintes ( $\bar{s} = \bar{\bar{\sigma}} - \frac{1}{3}(\text{tr}\bar{\bar{\sigma}})\bar{1}$ ) et  $\bar{h}$  le vecteur unitaire définissant la direction d'application du champ et de la contrainte équivalente. La contrainte équivalente, qu'on qualifiera de « déviatorique », s'exprime ainsi selon :

$$\sigma_{\text{eq}} = \frac{3}{2}({}^t \bar{h} \cdot \bar{s} \cdot \bar{h}) \quad (34)$$

#### 4.2 Contrainte équivalente définie à partir d'une équivalence en aimantation [19]

On considère cette fois que les simplifications opérées au paragraphe précédent ne sont plus admissibles ( $A_s \bar{\bar{\epsilon}}_{\alpha}^{\mu} : \bar{\bar{\sigma}} > 1$ ). En développant l'expression (29) définissant une équivalence en aimantation, on obtient:

$$\frac{\sinh(\mu_0 H A_s M_s) \cdot \exp\left(A_s \lambda_s \left(\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{zz}}{2}\right)\right)}{\cosh(\mu_0 H A_s M_s) \cdot \exp\left(A_s \lambda_s \left(\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{zz}}{2}\right)\right) + \exp\left(A_s \lambda_s \left(\sigma_{yy} - \frac{\sigma_{xx}}{2} - \frac{\sigma_{zz}}{2}\right)\right) + \exp\left(A_s \lambda_s \left(\sigma_{zz} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)\right)} = \quad (35)$$

$$\frac{\sinh(\mu_0 H A_s M_s) \cdot \exp(A_s \lambda_s \sigma_u)}{\cosh(\mu_0 H A_s M_s) \cdot \exp(A_s \lambda_s \sigma_u) + 2 \exp\left(-A_s \lambda_s \frac{\sigma_u}{2}\right)}$$

L'égalité est obtenue si et seulement si :

$$\exp\left(\frac{3}{2} A_s \lambda_s \sigma_u\right) = \frac{2 \exp\left(A_s \lambda_s \left(\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{zz}}{2}\right)\right)}{\exp\left(A_s \lambda_s \left(\sigma_{yy} - \frac{\sigma_{xx}}{2} - \frac{\sigma_{zz}}{2}\right)\right) + \exp\left(A_s \lambda_s \left(\sigma_{zz} - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)\right)} \quad (36)$$

relation qu'on généralise après quelques lignes de calcul selon :

$$\sigma_u = \frac{3}{2}({}^t \bar{h} \cdot \bar{s} \cdot \bar{h}) - \frac{2}{3 A_s \lambda_s} \ln \left( \frac{\exp\left(\frac{3 A_s \lambda_s}{2} \cdot \frac{3}{2} {}^t \bar{t}_1 \cdot \bar{s} \cdot \bar{t}_1\right) + \exp\left(\frac{3 A_s \lambda_s}{2} \cdot \frac{3}{2} {}^t \bar{t}_2 \cdot \bar{s} \cdot \bar{t}_2\right)}{2} \right) \quad (37)$$

où  $\bar{t}_1$  et  $\bar{t}_2$  sont deux vecteurs unitaires orthogonaux à  $\bar{h}$  tels que  $(\bar{h}, \bar{t}_1, \bar{t}_2)$  forme une base orthonormée directe associée au chargement magnétique.

On obtient une expression de la contrainte équivalente qui généralise l'expression (34), applicable à des cas de chargement plus intenses et/ ou à des matériaux fortement magnétostrictifs.

La contrainte équivalente, qu'on qualifiera de « généralisée », s'exprime selon :

<sup>2</sup> L'approche discrète n'est pas indispensable pour obtenir ce résultat. Il suffit de travailler avec le tenseur de magnétostriction moyen (sans rotation) et la valeur de magnétostriction moyenne dans la direction de la contrainte uniaxiale.

$$\sigma_{eq} = \frac{3}{2}(\bar{h} \cdot \bar{s} \cdot \bar{h}) - \frac{2}{3A_s \lambda_s} \ln \left( \frac{\exp(\frac{3A_s \lambda_s}{2} \cdot \frac{3}{2} \bar{t}_1 \cdot \bar{s} \cdot \bar{t}_1) + \exp(\frac{3A_s \lambda_s}{2} \cdot \frac{3}{2} \bar{t}_2 \cdot \bar{s} \cdot \bar{t}_2)}{2} \right) \quad (38)$$

### 4.3 comparaisons modèle-essais : comportement magnétique sous chargement mécanique biaxial d'un alliage fer-cobalt

Valider les modèles de contrainte équivalente proposés suppose de pouvoir réaliser des mesures magnétiques de type réversible (le modèle est réversible) sous chargement mécanique complexe. Les essais mécaniques biaxiaux consistent généralement en des essais de traction/torsion, de pression interne, et/ ou de traction/traction (le long de deux axes orthogonaux). Le format tôle étant sans nul doute le format le plus populaire pour les matériaux magnétiques constitutifs des machines électriques, seul le dernier essai est adapté à l'étude du comportement magnétique sous sollicitation mécanique biaxiale.

Ce type d'essai a été réalisé sur un alliage de fer-cobalt (AFK502-R Imphy alloys). Nous utilisons une éprouvette cruciforme rapportée sur une âme en acier inoxydable amagnétique. L'essai est réalisé sur la machine électrohydraulique triaxiale ASTREE du LMT-Cachan. Nous avons proposé une géométrie autorisant une mesure directe des grandeurs magnétiques et assurant une homogénéité satisfaisante de l'état de contrainte et des grandeurs magnétiques. On trouvera à ce sujet dans [16] et [19] l'ensemble des détails concernant la procédure expérimentale. Notons que des mesures dites « anhystériques » permettent d'accéder au comportement réversible.

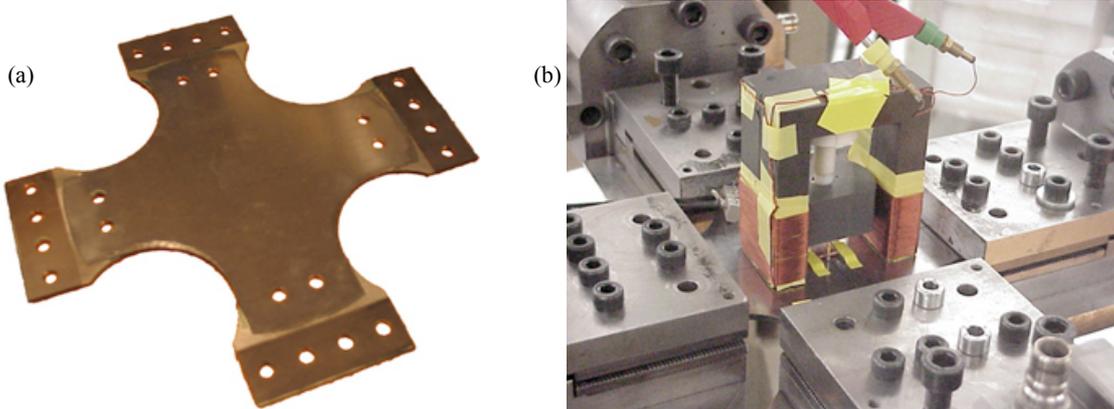


FIGURE 3: (a) éprouvette bi-couche cruciforme pour mesure sous chargement mécanique biaxial, (b) montée dans la machine équipée de son montage d'excitation et de mesure magnétique

La figure 3 permet d'apprécier la forme de l'éprouvette et l'éprouvette montée dans la machine et équipée de son montage d'excitation et de mesure magnétique.

La figure 4 résume à elle seule l'influence de l'état de contrainte biaxial sur la susceptibilité magnétique sécante évaluée pour champ parallèle à l'axe  $\bar{x}$  de 250A/m. On constate que l'évolution de la susceptibilité est fortement dictée par le niveau de contrainte suivant l'axe de mesure magnétique. On remarque une relative insensibilité de la susceptibilité à la contrainte  $\sigma_{yy}$  quand celle-ci est négative. L'état de "cisaillement"  $\sigma_{yy} = -\sigma_{xx}$  où la contrainte colinéaire au flux magnétique est négative conduit aux susceptibilités les plus basses observées.

La contrainte équivalente déviatorique dans le cas du chargement biaxial  $(\bar{x}, \bar{y})$  avec aimantation selon  $\bar{x}$  donne :

$$\sigma_{eq} = \sigma_{xx} - \frac{1}{2}\sigma_{yy} \quad (39)$$

La contrainte équivalente généralisée dans le cas du chargement biaxial  $(\bar{x}, \bar{y})$  avec aimantation selon  $\bar{x}$  donne :

$$\sigma_{eq} = \sigma_{xx} - \frac{2}{3A_s \lambda_s} \ln \left( \frac{1 + \exp\left(\frac{3A_s \lambda_s}{2} \sigma_{yy}\right)}{2} \right) \quad (40)$$

Le calcul de cette contrainte requiert la connaissance de la magnétostriction à saturation du matériau, de la susceptibilité initiale et de l'aimantation à saturation. Une brève revue de la littérature confirmée par quelques mesures uniaxiales donne environ :  $M_s=1,91.10^6$  A/m,  $\chi_0=2000$ ,  $\lambda_s=70.10^{-6}$ .

La figure 5 permet finalement de comparer les susceptibilités prévues par les deux modèles. Les évaluations dans le plan des contraintes sont réalisées à partir de mesures de susceptibilité sous chargement uniaxial interpolées. On constate de bonnes qualités de prédiction de l'une comme de l'autre évaluation. Cette représentation confirme que la contrainte équivalente déviatorique correspond à une approximation de la contrainte équivalente généralisée.

Notons que la contrainte équivalente déviatorique donnait déjà des résultats de bien meilleure qualité comparé aux contraintes équivalentes proposées par d'autres auteurs. La prédiction de susceptibilité de la est encore améliorée par l'emploi de la forme généralisée. En particulier, l'insensibilité de la susceptibilité à la contrainte  $\sigma_{yy}$  de compression est bien prédite.

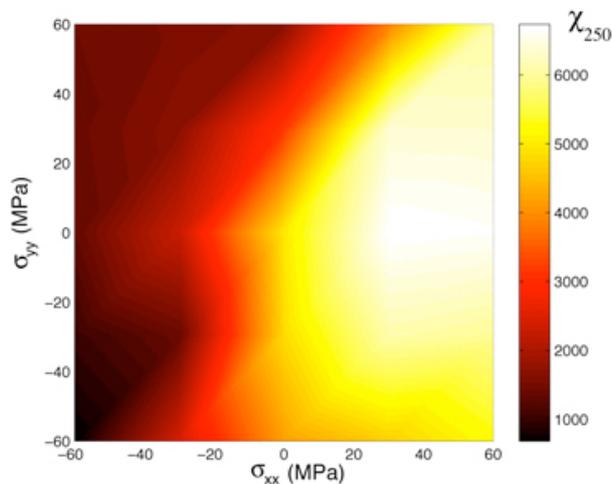


FIGURE 4 : Evolution expérimentale de la susceptibilité magnétique sécante à 250A/m en fonction de l'état de contrainte  $\vec{H} // \vec{x}$ .

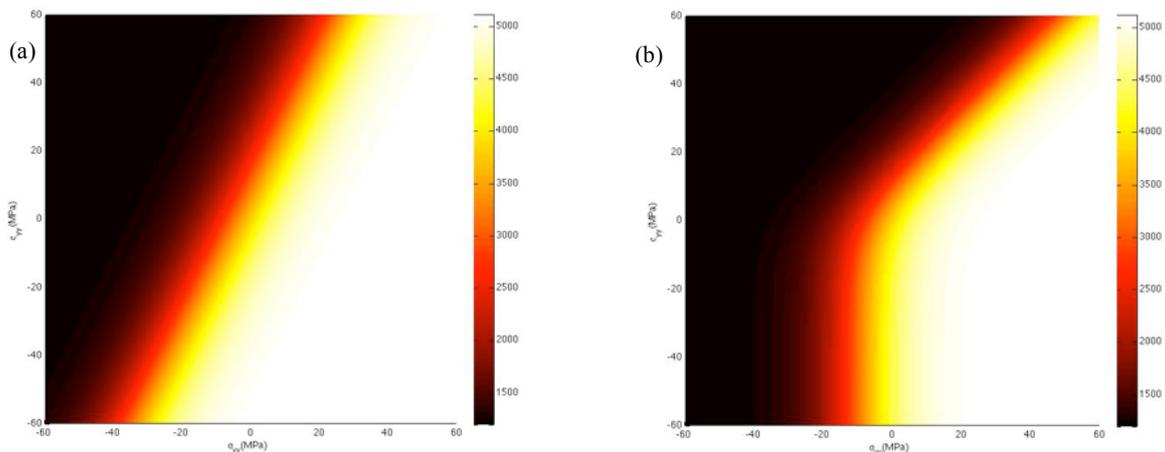


FIGURE 5 : Prédiction de susceptibilité à partir des deux estimations de contraintes équivalente : (a) contrainte équivalente déviatorique, (b) contrainte équivalente généralisée.

Compte tenu des similitudes fortes entre couplage magnétomécanique et couplage électromécanique (en particulier pour les matériaux ferroélectriques), il semble tout à fait envisageable d'appliquer ce type de démarche à ce deuxième couplage, bien que la variation de volume associée à la déformation électrostrictive soit à prendre en compte. Reste à mettre en place une série d'expériences discriminantes.

## 5. Extension au couplage thermique-mécanique – transformation de phase sous contrainte

Est-il possible d'étendre l'ensemble de la démarche précédente à d'autres formes de couplages ? Cela semble en effet possible à la seule condition que ce couplage s'exprime à une échelle intermédiaire claire où les potentiels pourront être écrits de manière simple. Autrement dit, cela suppose une discrétisation du volume en « phases », au même titre que les domaines magnétiques ou ferroélectriques peuvent être considérés comme des phases.

Intéressons nous en particulier au couplage thermique-mécanique qui intervient par exemple dans le comportement des alliages à mémoire de forme. Les alliages à mémoire de forme (AMF) sont sujets à un changement de phase solide/solide entre des structures cristallographiques différentes, nommées austénite et martensite. La figure 6 montre ainsi une microstructure d'un alliage à mémoire de forme. On observe des variantes de martensite à l'intérieur d'un même grain, variantes qu'on peut considérer en première approximation comme autant de phases, caractérisées par une déformation libre (déformation de transformation) et un potentiel chimique (enthalpie libre et entropie). La microstructure ainsi obtenue présente des similitudes avec les microstructures précédentes. Ce phénomène de changement de phase est piloté par les sollicitations thermiques et mécaniques locales.

Notons que le changement de phase s'accompagne de production de chaleur (chaleur latente). L'approche par potentiels réversibles n'est donc pas totalement adaptée à ce comportement. On ne pourra donc dans une première étape que considérer le comportement comme réversible.

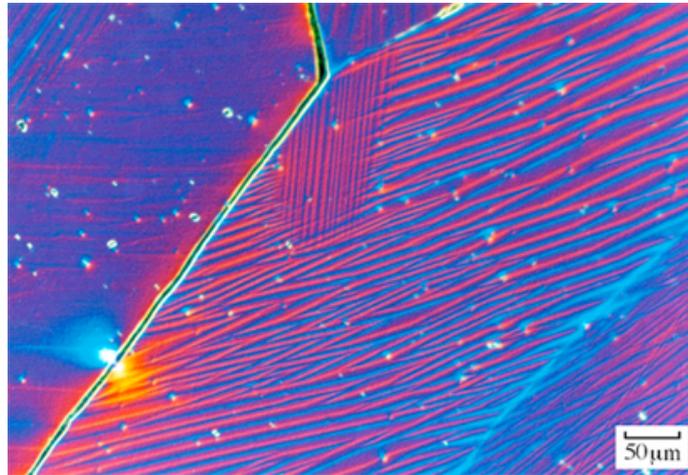


FIGURE 6 : Variantes martensitiques (Ni-Mn-Ga) [20]

Les variables thermodynamiques intervenant dans ce problème sont les contraintes et déformation de transformation pour l'aspect mécanique, l'entropie et la température pour l'aspect thermique. On peut ainsi définir le potentiel élastique (40) de manière similaire à celui écrit pour les couplages précédents, auquel on ajoutera un potentiel chimique (énergie de Gibbs) (41) traduisant le changement de phase.

$$W_{\alpha}^{\sigma} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{\alpha} : \underline{C}_{\alpha} : \bar{\sigma}_{\alpha} \quad (41)$$

$$W_{\alpha}^T = H_{\alpha} - T_{\alpha} S_{\alpha} \quad (42)$$

où  $H_{\alpha}$ ,  $S_{\alpha}$  et  $T_{\alpha}$  désignent l'enthalpie libre, l'entropie et la température de chacune des phases (variantes de martensite + phase austénitique). On utilise ensuite les hypothèses classiques de température homogène et de déformation homogène de manière à faire apparaître les contraintes  $\bar{\sigma}$  et température  $T$  macroscopiques comme variables de commande du problème. On obtient :

$$W_{\alpha}^{\sigma} = -\bar{\sigma} : \bar{\epsilon}_{\alpha}^t + W_0^{\sigma} \quad (43)$$

$$W_{\alpha}^T = H_{\alpha} - TS_{\alpha} \quad (44)$$

où  $\bar{\epsilon}_{\alpha}^t$  désigne la déformation de transformation par phase, tenseur dont la définition est parfois très complexe [21], mais normé à 0 pour la phase austénitique. Les lois de comportement associées sont alors des relations de la forme :

$$S = h(T, \bar{\sigma}) \quad (45)$$

$$\bar{\varepsilon}^t = h'(T, \bar{\sigma}) \quad (46)$$

impliquant les moyennes :

$$S = \int_{\alpha} S_{\alpha} d\alpha \quad (47)$$

$$\bar{\varepsilon}^t = \int_{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha}^t d\alpha \quad (48)$$

On trouvera l'ensemble des développements théoriques et hypothèses associées dans [22].

La contrainte équivalente au sens des AMF peut ainsi être définie comme la contrainte uniaxiale conduisant au même comportement entropique  $S(T)$  que la contrainte multiaxiale correspondante.

Nous achevons cet aparté sur ce simple schéma de principe : la déformation de transformation étant d'une nature très différente d'un matériau à l'autre, l'expression de la contrainte équivalente n'a pas forcément une définition unique (déformation avec ou sans transformation volumique, avec ou sans cisaillement etc...). Des expérimentations seront là encore indispensables pour évaluer cette approche.

## 6 Conclusion

Le travail présenté dans cette communication est un élément de principe de construction d'une contrainte équivalente dans le cadre des couplages multiphysiques, où une transition d'échelle est clairement définie physiquement et où l'échelle inférieure correspond à une phase ou une structure pouvant être considérée comme une phase. Les variables thermodynamiques associées dépendront évidemment des couplages observés.

L'approche a pu être menée jusqu'au bout (expérimentations de validation) en ce qui concerne le couplage magnéto-mécanique. Le couplage électromécanique au sein des matériaux ferroélectriques est de même nature. Des expérimentations sont requises pour confirmer l'approche proposée. Ces deux couplages se caractérisent en outre par une faible intensité des déformations (le cadre élastique linéaire reste valide). Ce n'est pas le cas pour le troisième couplage. Il s'agit d'une difficulté supplémentaire que seule une approche théorique rigoureuse pourra lever.

## Références

- [1] E. duTremolet de la Cheisserie, Magnetostriction theory and application of magnetoelasticity, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.
- [2] A.C. Eringen, G.A. Maugin, Electrodynamics of continua I, Springer, 1990.
- [3] L. Lolloz, S. Pataffatto and O. Hubert, J. of Electrical Engineering. Vol 57. Num 8/S. 15-20, 2006.
- [4] L. Daniel L and O. Hubert, European Physical Journal - Appl. Phys., Vol. 45, 31101, 2009.
- [5] L. Daniel, O. Hubert, N. Buiron and R. Billardon, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 56 (3), 1018–1042, 2008.
- [6] Y.P. Pellegrini, Homogénéisation des milieux diélectriques et conducteurs. In: M. Bornert, P. Gilormini and T. Bretheau, Editors, École Thématique du CNRS : Homogénéisation en Mécanique et Physique des Matériaux, La Londe les Maures 18–29 août (2003).
- [7] C. Kittel, Introduction to Solid State Physics, Wiley, John & Sons, 8th ed. 2005.
- [8] A. Hubert, R. Schäffer, Magnetic domains, Springer, 1998.
- [9] E. Hug, J. Mater. Sci., Vol. 30, 4417-4424, 1995.
- [10] B. Cheng, thèse de doctorat, INSA Lyon 1996.
- [11] W. F. Brown, Micromagnetics, Wiley, New York, 1963.
- [12] R.M. Bozorth, Ferromagnetism, ed. D. Van Norstand Company, N.Y. 1951.
- [13] R. Hill, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, 213-222, 1965.
- [14] J.D. Eshelby, Proc. R. Soc. Lond., Vol. A 421, 376-396, 1957.
- [15] N. Buiron, L. Hirsinger and R. Billardon. A micro-macro model for magnetostriction and stress effect on magnetisation. J. of Mag. and Mag. Mat. Vol 196/197. Pages 868-870. 1999.
- [16] O. Hubert, Przegląd Elektrotechniczny, Vol. 83 (4), 70-77. 2007.
- [17] L. Daniel and O. Hubert, J. of Applied Physics. Vol 105. 2009.
- [18] L. Daniel and O. Hubert, IEEE Trans. Mag., (sous presse), 2010.
- [19] O. Hubert and L. Daniel, « Energetical and multiscale approaches for the definition of an equivalent stress for magneto-elastic coupling », J. Mech. Phys. Solids, (soumis).
- [20] K. Tsuchiya, et al. Journal of Physics IV, Vol.11, 263-268, 2000.
- [21] K. Bhattacharya, microstructure of martensite, Oxford University Press, 2003.
- [22] A. Maynadier, thèse de doctorat, ENS-Cachan 2012.